Řešení úlohy č. 1

Mušle

Hra kterou domorodci hrají je variace hry Shut the Box.

Nejprve se podívejme, kolik kokosů můžeme očekávat po dvou zatřeseních kokosovníkem:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Z obrázku vidíme, že např. $p(K = 4) = 3/36$, $p(K = 7) = 6/36$, $p(K = 12) = 1/36, \dots$

Řešení na 4b

U řešení na 4b můžeme předpokládat, že $N = 0$

Označme si aktuální stav hry písmenem G, počet doposud odebraných mušlí jako $f(G)$, a pravděpodobnost, že naše finální skóre bude větší než S, pokud začínáme ve stavu G, jako $p_w(G)$.

Na výstup tedy budeme vypisovat číslo $p_w(123456789)$, které můžeme spočítat rekurzivně:

$$
\begin{aligned}
p_w(123456789) = {} & p(K=2) \cdot \max\{p_w(13456789)\} + \\
& p(K=3) \cdot \max\{p_w(3456789),\ p_w(12456789)\} + \\
& p(K=4) \cdot \max\{p_w(2456789),\ p_w(12356789)\} + \\
& p(K=5) \cdot \max\{p_w(12346789),\ p_w(2356789), p_w(1456789)\} + \\
& \dots
\end{aligned}
$$

Intuitivně, pokud nám spadne K kokosů, tak si ze stavů do kterých se můžeme dostat vybereme ten, u kterého máme největší pravděpodobnost, že vyhrajeme. Tyto nové pravděpodobnosti opět spočítáme rekurzivně. Pokud pro K kokosů nemáme k dispozici žádné tahy, tak pravděpodobnost, že vyhrajeme, je buďto 1 pokud $f(G) > S$, nebo 0 pokud $f(G) \leq S$.

Celkový počet možných stavů je 2^9 a stačí, když p_w spočítáme pro každý stav jednou. Při jednom výpočtu $p_w(G)$ se dotážeme na maximálně $11 \cdot 5$ dalších $p_w(G')$ a celkově tedy nepoužijeme více než $2^9 \cdot 11 \cdot 5 = 309760$ operací.

Řešení na 10b

Pokud $N > 0$, tak p_w vypočítáme obdobně; Pokud jsme ve stavu G a spadlo nám K kokosů, tak samozřejmě zase vybereme stav G', který má $p_w(G')$ největší. Jediné co se mění je, že pokud pro K kokosů neexistuje žádný tah a hru jsme tedy skončili, tak si nejsme jisti, jestli vyhrajeme nebo ne. Při $N = 0$ platilo, že pokud $f(G) > S$, tak jsme na 100% vyhráli. Nyní ale budou hrát domorodci i po nás a je možné, že naše skóre překonají. Vyhrajeme tedy pouze s pravděpodobností $p_m(f(G))$, tedy pravděpodobností, že ani jeden z N domorodců nebude mít skóre větší než $f(G)$.

$p_m(f(G))$ můžeme vypočítat jako $p_m(f(G)) = (\sum_{s=2}^{f(G)} p_d(s))^N$, kde $p_d(s)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že při své hře domorodec skončí se skórem s.

Dále $p_d(s) = \sum_{f(G)=s} p_e(G)$, kde $p_e(G)$ je pravděpodobnost, že domorodec skončí ve stavu G.

A $p_e(G) = p_v(G) * p(v\ G\ spadne\ počet\ kokosů,\ který\ nejde\ odstranit)$, kde $p_v(G)$ je pravděpodobnost, že domorodec při své hře navštíví stav G.

A funkci p_v můžeme opět vypočítat rekurzivně, $p_v(G) = \sum_{G'} p_v(G') \cdot p(G' \to G)$, kde G' je stav, ze kterého se dá dostat do G a $p(G' \to G)$ je pravděpodobnost, že se domorodec ze stavu G' vydá do stavu G.

Neformálně, pro každý stav vypočítáme pravděpodobnost, že v něm domorodec skončí, díky čemuž vypočítáme pravděpodobnosti s jakým skóre domorodec skončí, díky čemuž vypočítáme pravděpodobnost, že N domorodců bude mít skóre menší nebo rovno $f(G)$, což je ekvivalentní pravděpodobnosti že vyhrajeme, pokud skončíme ve stavu G.