Řešení úlohy č. 2
Světla

Problém vyřešíme pomocí teorie grafů.

Formálně se jedná o následující problém:

Vstup: Graf G, který je strom. Funkce určující hranové ohodnocení $w : E(G) \to \mathbb{N}$.

Výstup: Nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že existuje funkce $f : V(G) \to \mathbb{N}$, pro kterou platí

- $\sum_{v \in V(G)} f(v) = k$
- $\forall \{u, v\} \in E(G) : f(u) + f(v) \geq w(u, v)$

Kde funkce w nám určuje vzdálenosti křižovatek a funkce f určuje rozmístění nádob s palivem.

Algoritmus

K algoritmu se postupně dopracujeme, začneme pozorováním na jehož základě vytvoříme algoritmus.

Pozorování: Nechť G je strom, $v \in V(G)$ je list a u je jeho jediný soused. Pokud existuje řešení f, existuje i řešení f' takové, že $f'(v) = 0$.

Ukážeme jak z libovolného řešení f získat chtěné řešení f'. Nastavíme $f'(v) := 0$ a $f'(u) := f(u) + f(v)$ a pro všechny ostatní vrcholy r, necháme $f'(r) := f(r)$. Nyní musíme zaručit, že f' je stále řešením našeho problému. Stále platí, že součet f' přes vrcholy je k, protože $f'(v) + f'(u) = f(u) + f(v)$ a ostatní váhy vrcholů se nezměnily. Pro hrany jsou 3 případy vhledem k splnění podmínky $w(u, v) \leq f'(u) + f'(v)$. Buď hrana není tvořena ani jedním z vrcholů u a v, v tom případě je podmínka splněna, protože se hodnoty na daných vrcholech se nezměnila. Nebo je hrana vedena mezi vrcholy u a v a díky zachování rovnosti $f'(v) + f'(u) = f(u) + f(v) \geq w(u, v)$ podmínka platí. V posledním případě vede hrana mezi u a jiným vrcholem než je v (v je list, takže opačný případ nenastane). Hodnota $f'(u)$ není menší než $f(u)$, protože jsme k ní přičetli nezáporné číslo a všechnny vrcholy krom v mají stejnou váhu, takže i pro tyto hrany je podmínka splněna.

Uvedené pozorování vede k jednoduchému algoritmu.

1 Pro každý vrchol w, nastavíme $f(w) := 0$.
2 Pokud G má pouze jeden vrchol, nastav $k := \sum_{v \in V(G)} f(v)$ a skonči.
3 Nalezni list v a jeho jediného souseda u.
4 Nastav $f(u) := \max f(u), w(u, v) - f(v)$.
5 Odstraň v z G.
6 Vrať se na krok 2.

Algoritmus postupně počítá řešení f. V kroku 3 máme strom alespoň na 2 vrcholech. Díky větě o existenci listů víme, že existují alespoň 2 listy. V pátém kroku nám stále zůstane strom po odebrání listu díky větě o trhání listu. [1]) Ve 4. kroku využíváme pozorování, kdy jsme odebrali list a dali jsme mu nejmenší možnou hodnotu. Jeho soused u musí mít alespoň takovou váhu $f(u)$, aby se jejich váhy dohromady sečetly alespoň na požadovanou délku hrany $w(u, v)$ a zároveň byly splněny všechny dřívější požadavky.

[1]) Obě věty lze nalézt v Průvodci labyrintem algoritmů - `https://pruvodce.ucw.cz/static/pruvodce.pdf#page=504`

Analýza časové složitosti

Při implementaci není potřeba listy odstraňovat, stačí jen dobře zvolit pořadí procházení vrcholů. Vhodný průchod je třeba DFS (otevřu vrchol, poznačím si navštívení vrcholu, podívám se do všech neoznačených sousedních vrcholů), s tím že se řešení počítá až po prozkoumání neoznačených sousedů. Tímto způsobem můžeme o daných vrcholech uvažovat jako o listech. Jelikož jsme všechny odtrhli, tak momentální vrchol se nyní stává listem a můžeme aplikovat pozorování a „odtrhnout vrchol“.

Navštívili jsme tedy každý vrchol jenom jednou a provedli na něm pouze konstantně mnoho operací. Celková časová složitost je tedy $O(n)$. Paměťová složitost je omezena časovou a je tedy taktéž $O(n)$.