Řešení úlohy č. 3
Zahrádka

Pointa řešení je následující úvaha. Označme $D = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$. Uvažme políčko $d \in D$. Označme množinu symetrií na vstupu jako S. Tedy $S \subseteq \{\backslash, /, -, |\}$. Pro každé $s \in S$ uvažme funkci $f_S : \mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(D)$, která množině prvků $D' \subseteq D$ přiřadí množinu prvků, na které se nějaký $d' \in D'$ může namapovat nějakou symetrií $s \in S$. Nyní pro každé políčko $d \in D$ zvlášť nalezneme „fixed point“ aplikace funkce f_S na $\{d\}$. Tj. Položíme $X_0 = \{d\}$ a pro $i \geq 0$ dokud $f_S(X_i) \neq X_i$, tak pokládáme $X_{i+1} = f_S(X_i)$. Tento proces se nutně zastaví po konstantně mnoho krocích. Takto můžeme celou matici D rozložit na disjunktní množiny $Y_1, \dots, Y_m$ pro které platí $F_S(Y_i) = Y_i$. Navíc požadujeme, aby tento rozklad byl co nejhrubší (tj. pro každý jiný rozklad $Z_1, \dots, Z_\ell$ je každé Y_i sjednocením některých Z_j. Jinými slovy aby Y_i byly co největší možné. Nyní, ze zadání plyne, že v každé takové Y_i musí být stejné prvky. Pro každou z těchto tříd rozkladu se tedy stačí podívat na ten nejčastější prvek – označme jej jako x – a ten prohlásit za majoritní, zbytek stačí změnit na x a to dá zaručeně nejmenší možný počet změn. Např. je-li $Y_1 = \{1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5\}$, je nejčastější $x = 3$, takže změníme $1, 2, 4, 5$ na číslo 3, což je ta nejlevnější možná operace.

Programová realizace je následující. Procházíme postupně všechna políčka a ukládáme si, která už jsme viděli. Pro každé políčko počítáme množiny X_i dokud nejsme v pevném bodě Y. Pro všechna políčka $d \in Y$ si poznačíme, že už jsme je navštívili, abychom tuto třídu rozkladu nenapočítávali znovu. Připočítáme si do výsledku počet změn. Takto projdeme všechna políčka a vypíšeme výsledek.

Čas: Na každém políčku buďto strávíme nějaký čas počítáním příslušné množiny X_i, nebo jej přeskočíme, protože jsme jej už navštívili. Protože symetrií je konečný počet a velikost orbity každé z nich je nanejvýš 8 (tj. po nanejvýš 8 aplikacích dané symetrie skončíme na tom stejném místě), lze fixní bod Y spočítat v čase $O(1)$ a $|Y| = O(1)$, takže spočítat ten nejčastější prvek lze také za $O(1)$. Celkem tedy máme čas $O(n^2) \cdot O(1) = O(n^2)$.