Řešení úlohy č. 2
Bezpečnostní kamery

V této úloze je naším cílem přiřadit každému zařízení v síti celočíselnou frekvenci tak, aby žádáná dvě sousední zařízení neměla stejnou frekvenci. Zároveň chceme použít co nejmenší počet různých frekvencí. Zadanou síť můžeme modelovat jako graf G s vrcholy $V(G) = \{1, \ldots, N\}$. Podle zadání víme, že dva vrcholy jsou spojeny hranou, jestliže jedno z čísel je dělitelem druhého. Formálně tedy $E(G) = \{(u, v) \in \{1, \ldots, N\}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N} : k \geq 2 \wedge v = uk\}$.

Část 1

V první části musíme každému zařízení přiřadit frekvenci bez jakékoliv komunikace, jen za pomoci jeho vlastního identifikátoru i. K určení frekvence využijeme prvočíselný rozklad.

Pro libovolné celé číslo $i \geq 1$, nechť $i = \prod_{j=1}^{t} p_j^{a_j}$ je prvočíselný rozklad (faktorizace) čísla i (pro pohodlnost řekneme, že prvočíselný rozklad jedničky je prázdný produkt, tedy $t = 0$). Potom definujeme funkci f, která zadanému identifikátoru přiřadí frekvenci, následovně:

$$f(i) = \sum_{j=1}^{t} a_j.$$

Tedy $f(i)$ je součet exponentů z prvočíselného rozkladu i a $f(1) = 0$. Podle zadání stačí jakýkoliv algoritmus, který je zaručeně konečný. Stačí nám tedy poznamenat, že prvočíselný rozklad můžeme získat pomocí libovolného známého algoritmu a výpočet hodnoty $f(i)$ tak jistě zvládneme v konečném čase. Zbývá nám ještě dokázat, že žádná dvě sousední zařízení nemají stejnou frekvenci (Validní frekvence) a že námi zvolené přiřazení používá nejmenší možný počet frekvencí (Minimální frekvence).

Validní frekvence. Nechť $e = (u, v) \in E(G)$ je libovolná hrana v grafu G, který modeluje naši síť zařízení. Podle definice víme, že $v = uk$ pro nějaké $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Nechť $u = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i}$ je faktorizace čísla u a $k = \prod_{j=1}^{t} q_j^{b_j}$ je faktorizace čísla k. Faktorizace čísla v je zřejmě $v = uk = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i} \prod_{j=1}^{t} q_j^{b_j}$. Protože $k \geq 2$, jeho faktorizace musí být neprázdná (tedy $t \geq 1, q_1 \geq 2, b_1 \geq 1$). To znamená, že

$$f(u) = \sum_{i=1}^{s} a_i < \sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{j=1}^{t} b_j = f(v),$$

neboli $f(u) \neq f(v)$.

Minimální frekvence. Nechť $u = \arg\max_{v \in V(G)} f(v)$, tedy u je identifikátor nějakého zařízení s nejvyšší přiřazenou frekvencí. Podívejme se nyní na následující množinu vrcholů:

$$H = \{2^0, 2^1, \ldots, 2^{f(u)}\}.$$

Pro každý $v \in H$ jistě platí, že $1 \leq v \leq u$, tedy H je podmnožina vrcholů $V(G)$. Kromě toho pro každou dvojici $i, j \in H$ jistě platí, že buď i dělí j, nebo j dělí i. To znamená, že H tvoří kliku v grafu G (každá dvojice vrcholů v H je propojena hranou). V takovém případě ale nutně musíme pro každý vrchol v H použít jinou frekvenci, neboli nutně musíme použít alespoň $|H| = f(u) + 1$ frekvencí, což je přesně počet frekvencí, které jsme skutečně použili.

Část 2

Ve druhé části předpokládáme, že zařízaní neznají svůj identifikátor. Naším cílem je navrhnout algoritmus, který bude spuštěn na každém zařízení současně a po maximálně $\log_2(N)+5$ kolech synchronizované komunikace podél orientovaných hran v grafu G přiřadí každému zařízení správnou frekvenci. Náš algoritmus ve skutečnosti přiřadí každému vrcholu stejnou frekvenci, jako funkce f v Části 1. Konrétně pokud bychom kola číslovali od nuly, pak v kole k bude přiřazena správná frekvence všem vrcholům $v \in V(G)$ takovým, že $f(v) = k$. Poté si všimneme, že počet frekvencí přiřezených funkcí f je nejvýše logaritmický, čímž dokážeme, že náš algoritmus skončí v požadovaném časovém limitu. Samotný algoritmus je poměrně jednoduchý:

```
1 v každém kole k:
2   pokud k = 0 nebo přišla zpráva od nějakého souseda:
3     frekvence := k
4     pošli zprávu "1" všem sousedům
```

Správnost algoritmu. Pro zjednodušení argumentu řekneme, že vrchol je *aktivní* v kole k, pokud splní podmínku na řádku 2, tedy je mu zvýšena frekvence a zároveň pošle zprávu všem sousedům. Dále řekneme, že vrchol je *deaktivován* na konci kola k, pokud k je poslední kolo, ve kterém byl aktivní; takový vrchol tedy dostane přiřazenu frekvenci k a následně již neobdrží žádné zprávy.

Matematickou indukcí podle kola k dokážeme, že každý vrchol $v \in V(G)$ bude deaktivován v kole $f(v)$. Základní krok je triviální: jedině vrchol 1 (centrální server) má mít frekvenci 0; tu jistě dostane a dále se mu již nezvýší, protože do něj nevedou žádné hrany. Všechny ostatní vrcholy naopak dostanou v následujícím kole minimálně zprávu od vrcholu 1.

Pro indukční krok předpokládejme, že právě skončilo kolo $k \geq 1$. Z indukčního předpokladu tedy víme, že každý vrchol $u \in V(G)$ s $f(u) \leq k-1$ byl deaktivován nejpozději na konci kola $k-1$ a všechny ostatní budou v kole k aktivní. Nechť $w \in V(G)$ je libovolný vrchol s $f(w) = k$. Pro všechny vstupní hrany $(v, w) \in E(G)$ jistě platí, že v byl deaktivován nejpozději na konci kola $k-1$, protože v dělí w, tedy $f(v) \leq f(w) - 1 = k - 1$. Tudž w bude deaktivován na konci kola k, protože již nemá žádné aktivní sousedy, od kterých by mohl v příštím kole obdržet zprávu. Na druhou stranu, nechť $x \in V(G)$ je libovolný vrchol s $f(x) \geq k+1$. Potom pro libovolného prvočíselného dělitele p jistě existuje soused $w = x/p$ takový, že $(w, x) \in E(G)$ a $c(w) = c(x) - 1 \geq k$. To znamená, že w je v tomto kole stále aktivní a odešle zprávu vrcholu x, tedy x nebude na konci tohoto kola deaktivován.

Tímto jsme dokázali, že náš algoritmus přiřadí každému vrcholu $v \in V(G)$ frekvenci $f(v)$.

Časová složitost. Podle zadání nás opět nezajímá složitost výpočtu v rámci jednotlivých kol, ale jen celkový počet kol. Již víme, že algoritmus potřebuje běžet přesně tolik kol, kolik přiřadí různých frekvencí, neboli $f(u)+1$ (jelikož jsme začali číslovat od nuly). Stačí nám tedy zjistit, jaká bude nejvyšší přiřazená frekvence. Vzpomeňme si na množinu H definovanou na konci Části 1. Již víme, že $f(u) + 1 = |H|$. Množina H se skládá z mocnin dvojky, které jsou nanejvýš $u \leq N$ a těch je přesně $\lfloor \log_2 N \rfloor + 1$. Toto číslo je tedy počtem různých frekvencí a tím pádem i počtem kol.