

Řešení úlohy č. 3

Krmení

Pozn: Protože autor úlohy zapomněl zkontrolovat generátor stromů, stromy na vstupu nejsou nijak hluboké a šlo tedy odevzdat řešení které toho využívají, nejsou asymptoticky optimální a při otestování na hlubších stromech by neprošly.

Pro každý dotaz máme na vstupu k_i vrcholů u_1, u_2, \dots, u_{k_i} a musíme najít vrchol z (vrchol ve kterém by ZOO byla nejlépe umístěna), pro který je rozdíl $\sum_{j=1}^{k_i} \text{dist}(1, u_j) - \sum_{j=1}^{k_i} \text{dist}(z, u_j)$ co největší. Jinými slovy *aktuální cena dovozu - minimální cena dovozu*.

Pokud strom zakořeníme ve vrcholu 1, poté $\text{dist}(1, u) = h(u)$, kde $h(u)$ je hloubka vrcholu u , kterou si můžeme předpočítat předem pomocí DFS z vrcholu 1. Vypočítat $\sum_{j=1}^{k_i} \text{dist}(1, u_j)$ je tedy jednoduché a budeme se soustředit na to, jak najít optimální z a vypočítat $\sum_{j=1}^{k_i} \text{dist}(z, u_j)$

1 bod

Pokud $k_i = 1$, minimální cena je zřejmě vždy 0, protože ZOO můžeme umístit přímo do země s krmením. (tedy jako vrchol z vybrat u_1). Stačí tedy vypsát $h(u_1)$.

3 body

Pokud $k_i = 2$, můžeme si povšimnout, že ZOO bude optimální umístit kdekoliv na cestě mezi u_1 a u_2 , optimální cena tedy bude: $\sum_{j=1}^{k_i} \text{dist}(z, u_j) = \text{dist}(z, u_1) + \text{dist}(z, u_2) = \text{dist}(u_1, u_2)$. Musíme tedy zpracovat dotazy na vzdálenost mezi dvěma vrcholy na stromě. To je standardní úloha, $\text{dist}(u, v) = h(u) + h(v) - 2 \cdot h(\text{lca}(u, v))$. Jak najít $\text{lca}(u, v)$ je také standardní úloha, po troše googlení můžeme najít třeba toto videjko. Stačí tedy vypsát $h(u_1) + h(u_2) - \text{dist}(u_1, u_2)$

5 bodů

Pozorování z předchozího bodu můžeme zobecnit a říct, že jeden z vrcholů $\{\text{lca}(u_i, u_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq k_i\}$ bude optimálním z . Pro $k_i = 3$ tedy můžeme jako z vyzkoušet vrcholy $\{\text{lca}(u_1, u_2), \text{lca}(u_1, u_3), \text{lca}(u_2, u_3)\}$ a pro každý spočítat součet vzdáleností k $\{u_1, u_2, u_3\}$ a vybrat ten nejmenší součet jako minimální cenu dovozu.

7 bodů

Pokud $k_i = 100$, může se zdát, že budeme mít až $100 \cdot 100$ různých lca, kde pro vyzkoušení jednoho z nich musíme sečíst vzdálenost ke 100 vrcholům a to všechno pro $3 \cdot 10^5 / k_i$ dotazů, celkově tedy $100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 10^5 / 100 = 3 \cdot 10^9$ operací, což už může trvat příliš dlouho. Stačí si ale povšimnout, že různých lca může být maximálně $2k_i - 1$ a počet operací tedy bude přibližně $6 \cdot 10^7$, což už je zvládnutelné. Opět tedy jako z vyzkoušíme všechny vrcholy $\{\text{lca}(u_i, u_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq k_i\}$ a vybereme ten s nejmenší cenou. Složitost $O(k_i^2)$ za dotaz.

10 bodů

Pokud $k_i = n$, algoritmus s časovou složitostí $O(k_i^2)$ zřejmě nemůžeme použít. Pro menší k_i ale tento algoritmus fungoval, takže můžeme zkusit vymyslet postup který bude dobře fungovat pro větší k_i a pak je zkombinovat.

Můžeme například použít tento algoritmus, který funguje v $O(n)$ za dotaz:

- 1) Nejdříve spočítejme cenu pro $z = 1$ v $O(n)$ ($\text{cost}_1 = \sum_{j=1}^{k_i} h(u_j)$).
- 2) Poté spočítejme cenu pro vrchol u , který je synem vrcholu 1 v $O(1)$:

$cost_u = cost_1 - cnt_u + (k_i - cnt_u)$. Kde cnt_u je počet vrcholů z dotazu, které se nacházejí v podstromě u . Intuice: pokud zoo posuneme z vrcholu 1 do vrcholu u , všechno krmení v podstromě u bude o 1 blíže a všechno ostatní krmení bude o 1 dále. Tuto rovnici můžeme rekurzivně aplikovat i na všechny syny u a poté jako z vybrat vrchol s nejmenší cenou.

Máme tedy 2 algoritmy, jeden běží v $O(k_i^2)$ za dotaz, a druhý v $O(n)$ za dotaz. První algoritmus bude mít časovou složitost $O(n^2)$ pokud dostaneme jeden dotaz s velikostí $k_i = n$ a druhý algoritmus bude mít časovou složitost $O(n^2)$ pokud dostaneme n dotazů s velikostí $k_i = 1$. Když je ale zkombinujeme a algoritmus č.1 použijeme v případě kdy $k_i \leq \sqrt{n}$ a algoritmus č.2 pokud $k_i > \sqrt{n}$, celková složitost bude $O(n \cdot \sqrt{n})$.

Úloha jde také vyřešit v čase $O(n \cdot \log(n))$ s použitím auxiliary tree, ale nebylo to na 10 bodů potřeba.