Řešení úlohy č. 2

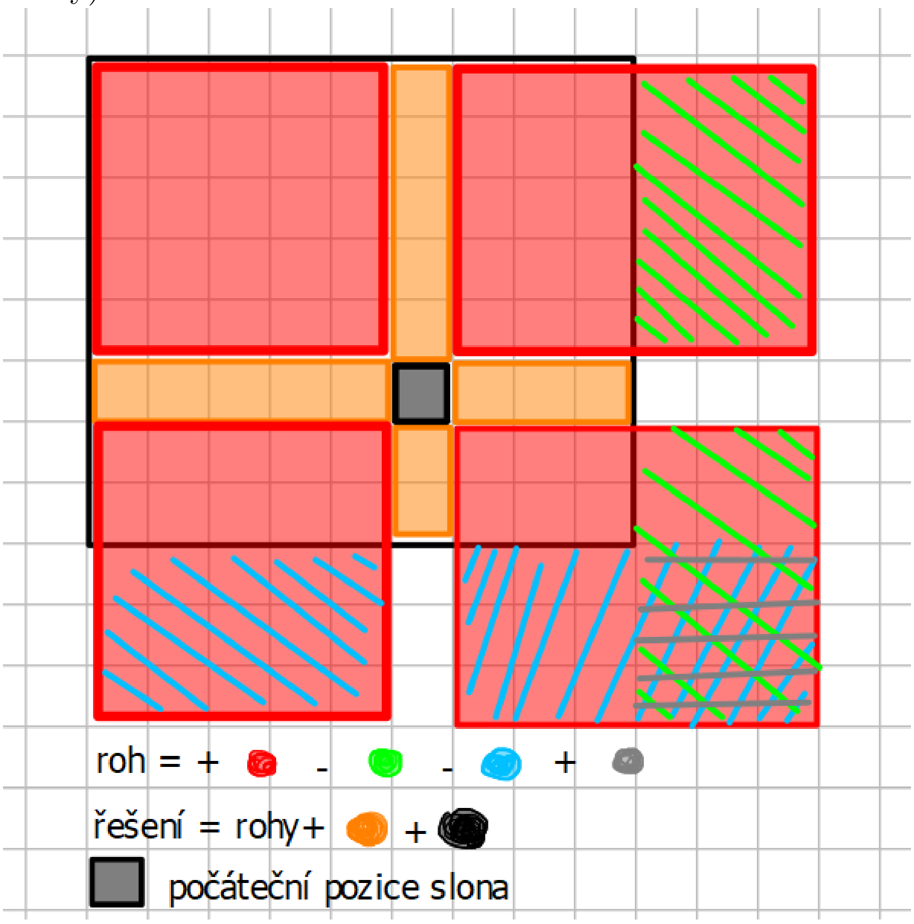
Sloni

Algoritmus

Slon ušel vzdálenost n, a tedy mohl skončit na políčku ve vzdálenosti n a bližším. Nemohl skončit na políčku vzdáleném lichý počet kroků pokud n je sudé. Analogicky slon nemohl skončit na políčku vzdáleném sudý počet kroků je-li n liché.

Optimální řešení lze nalézt v $O(1)$. Lze vypozorovat, že pro neomeznemé pole je možno se dosat v n krocích na $(n+1)^2$ políček. Slon se dostane na každé sudé (repektivě liché) políčko v dosahu n. Při omezené velikosti je potřeba vyřadit nemožné kroky, tj oříznout části, které přesahují z pole.

Pro jednodušší ořezávání jsem si rozdělil plochu kam se slon mohl dostat podle obrázku na počáteční souřadnice slona (černá barva), rovné čáry do krajů (oranžová) a rohy (zbylé barvy).



Rohy řešíme pomocí principu inkluze a exkluze. Přičteme počet řešení v červeném obdelníku a odečteme řešení v modrém a zeleném (šrafování). Tímto odečtením jsme ale odečetli šedý obdelník dvakrát a tak ho potřebuje přičíst. Velikost obdelníků je určena vzdáleností od počátku a počtem kroků.

Vzorec pro vzdálenost dvou bodů (x_1, y_1) (x_2, y_2) je $\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|$. Vzorce pro počet řešení v obdelníku jsou různé na základě sudosti. Označíme rozdíl vzdálenosti a kroků jako d. Pokud je vzdálenost nejbližšího rohu sudá a počet kroků také (nebo oboje liché) pak je vzorec $(\frac{d}{2}+1)^2$ a jinak $(\frac{d+1}{2} \cdot \frac{d+1}{2}+1)$.

Je li $n+1$ liché, přičteme 1 řešení, jelikož slon může být po n krocích opět na počátečních souřadnicích. Za oranžovou lajnu o délce l musíme přičíst $\frac{min(n,l)+n\%2)}{2}$ políček k řešení.

Korektnost a konečnost

Algoritmus je korektní, protože na vzdálenější políčka se nejde dostat kratší než nejkratší cestou a mezi žádnými dvěma poli v čtvercové síti neexistují najednou cesty s lichým a sudým počtem kroků. Zároveň se jde dostat na všechny pole které jsou n daleko a na pole $(n-2)$x daleko se jde dostat n kroky tak že dojdeme na toto pole, vrátíme se o jedno pole a přijeme zpět.

Algoritmus je jistě konečný, jelikož se výsledek dá zapsat zapsat matematickým vzorcem.