Řešení úlohy č. 3

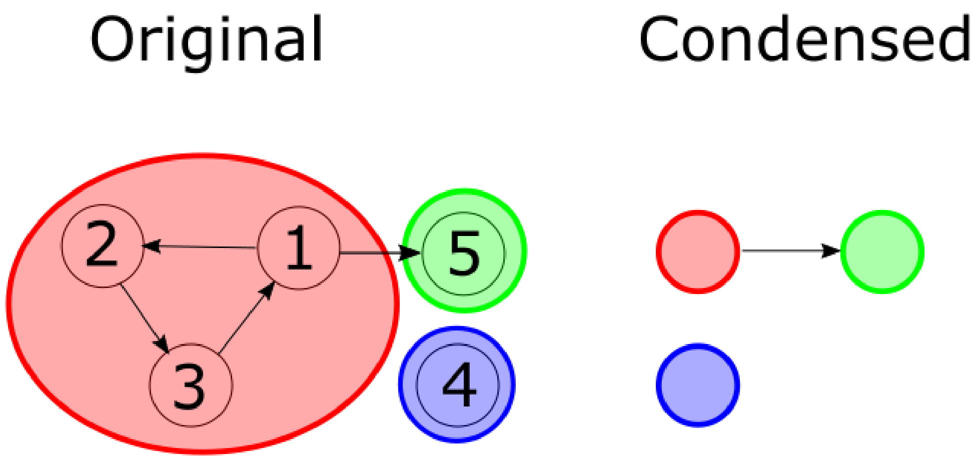
Prohlídkové okruhy

Algoritmus

Pro vyřešení této úlohy je vhodné použít algoritmus pro nalezení silně souvislých komponent. Tento algoritmus nám zajistí redukci grafu tak, že vrcholy patřící do stejné silně souvislé komponenty zredukuje na nový vrchol v grafu G'. Protože operujeme s podmínkou, že existují právě 3 komponenty silné souvislosti v celém grafu, stačí jednoduše vytvořit tabulku $3x3$ ukazující vztahy mezi těmito komponentami. Díky tomu dosáhneme $O(1)$ časové složitosti při kontrole vztahu mezi vrcholy (Jedná se o stejný dotaz jako na cesty mezi komponentami souvislosti). Celková časová složitost je tedy $O(V + E + P)$, kde E je počet hran, V je počet vrcholů a P je počet dotazů.

Nalezení silně souvislých komponent

Algoritmus si nejprve zvolí vrchol a prohledá všechny vrcholy, do kterých je možné se dostat. Jmenovitě se graf prohledává pomocí DFS. Každý vrchol si při vstupu pomocí DFS označíme jako navštívený. Pokud již náš vrchol nemá žádné nenavštívené sousedy, uloží se ID aktuálního vrcholu na zásobník a tento vrchol se opustí. Může se stát, že jsme neprošli všechny vrcholy a tak se náhodně zavoláme na zbývající vrcholy a stejným způsobem je projdeme. Nyní budeme postupně vytahovat ID ze dříve vytvořeného zásobníku a vždy zavoláme DFS na tyto vrcholy. Tentokrát se ovšem voláme na graf, který má oproti našemu původnímu obrácenou orientaci hran. Všechny vrcholy, do kterých se tímto způsobem dostaneme, nazveme silně souvislou komponentou. Toto opakujeme dokud není zásobník ID vrcholů prázdný.



Ukázka kondenzace grafu pro první ukázkový vstup

Správnost

První DFS průchod nám určí pořadí vrcholů takové, kde je poznat ze kterého vrcholu se lze kam dostat. Druhé DFS nám naopak určí odkud se můžeme dostat do aktuálního. Pokud uděláme „průnik“ těchto dvou množin, získáme přiřazení vrcholů jejich komponentám souvislosti.

Zde již přichází vlastní podmínka o množinách křižovatek (vrcholů). Díky tomu, že máme zaručenou existenci pouze 3 množin (všimněte si, že definice množiny je stejná jako definice silně souvislé komponenty) víme, že pokud je možné se dostat z nějaké komponenty do jiné, musí tyto dvě komponenty sousedit. Není tedy potřeba znovu prohledávat tento redukovaný graf kvůli nalezení všech cest.

Časová složitost

Bystrý čtenář si všimne, že algoritmus ve skutečnosti nepoužívá žádnou příliš složitou metodu. Jedná se pouze o 2 DFS pro nalezení silně souvislých komponent a výtvoření redukovaného grafu. Tato část je tedy stejně složitá jako 2x DFS (tzn. $O(2*(V+E)) = O(V+E)$, kde V je počet vrcholů a E je počet hran). Druhá část úlohy souvisí s vlastní odpovědí na kladené dodtazy. Tato část je ovšem triviální, neboť díky informaci, že existují pouze 3 silně souvislé komponenty, můžeme vyhledat každý dotaz velmi rychle ($O(P)$, kde P je počet dotazů) Celková časová složitost je tedy rovna $O(N + E + P)$

Konečnost

Předpokládejme, že algoritmus na tomto konečném grafu nikdy neskončí. To ovšem znamená, že se nikdy neukončí první DFS (druhé DFS nemůže být nekonečné pokud první na stejném grafu skončilo). Toto je ovšem spor s předpokladem, že máme konečně velký graf.