Úloha č. 3
Kraj pro elfky

Řešení

Jako první je nutné vyřešit, jak vůbec takový graf reprezentovat. Jednou z možností je, vytvořit seznam sousedů pro každý vrchol. To můžeme udělat například pomocí spojového seznamu, natahovacího polo a podobně.

V úloze bylo poměrně málo vrcholů, což mohlo navádět na to, vyzkoušet všechny vrcholy jako kraj pro elfky. Pro každý vrchol zkusíme tedy onen vrchol zakázat a vyzkoušíme, zda-li je zbytek grafu bipartitní (tedy lze-li rozdělit vrcholy do takových 2 množin, že nevede hrana z nějaké množiny do té samé množiny). Bipartitnost lze zjistit kupříkladu 2-obarvením.

2-Obarvení uděláme tak, že z každého vrcholu, který není obarvený, pustíme **DFS** [Depth First Search] s jednou ze 2 barev. Pokud je vrchol v **DFS** obarvený, pak ukončíme DFS, buďto spokojeně, a nebo nespokojeně (pokud se barva, kterou se vrchol snažíme obarvit neshoduje s barvou, kterou je vrchol obarven). Pokud je vrchol neobarven, obarvíme ho a pokusíme se obarvit všechny jeho sousedy opačnou barvou. Pokud je alespoň jeden soused nemůže nabarvit souseda na opačnou barvu, jsme nespokojeni (v opačném případě jsme spokojeni).

Pokud tedy alespoň jedno vyjmutí vrcholu bude mít za následek spokojenost všech **dfs** volání, nalezli jsme vhodný Cuiviénen.

Složitost jedné sady takových **dfs** bývá nejhůře $O(N + M)$. Těchto takzvaných sad může být až $O(N)$, neb to zkoušíme pro každý vrchol. Vychází nám tedy celková složitost $O(N^2 + NM)$ (kde M je počet hran a N počet vrcholů), s čímž jsme spokojeni.