Úloha č. 3
Magické formule #1

Magické formule, ako si možno niektorí z Vás všimli, boli len mierne zamaskovaný matematický systém, známy pod názvom „lambda kalkulus“. Jedná sa o dôležitú teoretickú konštrukciu, ktorá je základným kameňom funkcionálneho programovania. Premýšlanie nad úlohami v lambda kalkule vám môže pomôcť hlavne pri pochopení konceptov v jazykoch ako Haskell, či Lisp, princípy funkcionálneho programovania sa ale objavujú aj vo väčšine mainstreamových jazykov (lambdy v C++, funkčné premenné v Javascripte, ...).

Prejdime ale k samotnej úlohe, jej prvou časťou bolo násobenie dvoch prirodzených čísel. Jedným z tých jednoduchších spôsobov, ako úlohu riešiť, je vyjadriť si sčítanie (popísané v zadaní) ako funkciu:

$$\textsf{\textbf{ADD}} := \bigstar\ a\,b\ \cdot\ a\,\textsf{\textbf{INC}}\,b$$

Ďalej vieme, že číslo n je len n-násobná aplikácia jednej funkcie na druhú. Môžeme teda vyjadriť násobenie čísel a a b ako a-násobnú aplikáciu pričítania b k nule:

$$\textsf{\textbf{MUL}} := \bigstar\ a\,b\ \cdot\ a\,(\textsf{\textbf{INC}}\,b)\,\textsf{\textbf{0}}$$

Existuje ešte kratšia (a subjektívne krajšia) varianta, ktorá ale nemá tak intuitívne vysvetlenie a prikladáme ju skôr pre zaujímavosť:

$$\textsf{\textbf{MUL}} := \bigstar\ a\,b\,c\ \cdot\ a\,(b\,c)$$

Druhá časť úlohy, odčítanie celých čísel, patrila k tým náročnejším, pri čom veľká časť jej obtiažnosti sa odvíjala od zvolenej reprezentácie záporných hodnôt.

Vo väčšine prípadov sa k tomu používa dvojica prirodzených čísel, často spôsobom, kedy prvá hodnota reprezentuje znamienko a druhá je absolútna hodnota. Pri tomto postupe riešenia je ale odčítanie pomerne zložité a vyžaduje radu medzikrokov, na ktoré je náročné prísť samostatne.

Oveľa prijateľnejšou alternatívou je reprezentovať celé číslo x dvojicou prirodzených čísel (a, b), kde hodnota x je $a - b$. Má to síce pár nedokonalostí, jednou z nich je, že takto reprezentované čísla nie sú unikátne, v rámci nášho zadania nám to ale v ničom nevadí.

Odčítanie je potom jednoduco realizovateľné pomocou sčítania – ak mám dve celé čísla $a = (b, c)$ a $x = (y, z)$, potom $a - x = (b + z, c + y)$.

Jediným problémom zostáva práva s pármi, ktorá sa dá riešiť tak, že celé číslo $a = (b, c)$ vo formuliach zapíšeme ako:

$$a = \bigstar\ s\ \cdot\ s\,b\,c$$

kde parameter s je takzvaná „selektorová funkcia“, pomocou ktorej vieme rýchlo z páru vybrať prvú alebo druhú hodnotu:

$$\textsf{\textbf{FIR}} := \bigstar s\ \cdot\ s\,(\bigstar a\,b\ \cdot\ a)$$

$$\textsf{\textbf{SEC}} := \bigstar s\ \cdot\ s\,(\bigstar a\,b\ \cdot\ b)$$

Odčítanie (prípadne sčítanie) hodnôt a a x je potom už len otázkou manipulácie s pármi hodnôt:

$$\textsf{\textbf{SUB}} := \bigstar a\,x\ \cdot\ (\bigstar s\ \cdot\ s\,(\,\textsf{\textbf{ADD}}\ (\textsf{\textbf{FIR}}\,a)\ (\textsf{\textbf{SEC}}\,x)\,)(\,\textsf{\textbf{ADD}}\ (\textsf{\textbf{FIR}}\,x)\ (\textsf{\textbf{SEC}}\,a)\,)\,)$$