# Úloha č. 2
## Zbojníci

Rozmysli, popiš a naprogramuj! 10 b

Prvně, projděme si všechny možnosti rozestavení jedné lodi. V bloku velikosti $N \times M$ je loď délky $A$ možné položit horizontálně (pokud $A \leq M$) do každého řádku $M - A + 1$ různými způsoby. Podobně, lze položit vertikálně do každého sloupce $N - A + 1$ různými způsoby. Abychom se nemuseli všude zabývat tím, jestli je délka validní, zaveďme si funkci

$$m(x) = \max(x, 0).$$

Celkový počet možností vložení jedné lodě do bloku velikosti $N \times M$ je

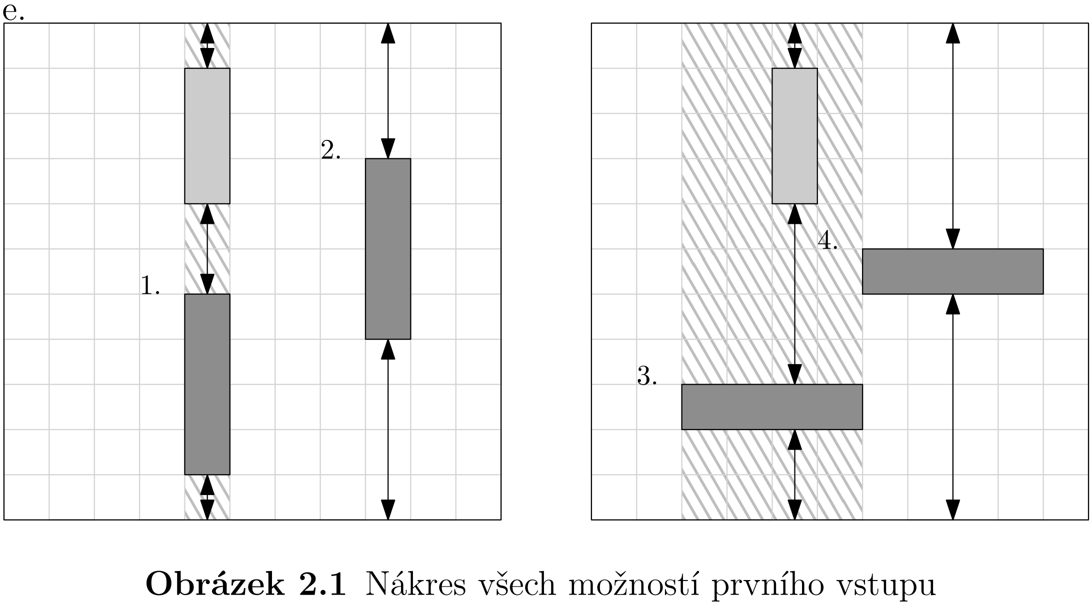
$$Nm(M - A + 1) + Mm(N - A + 1).$$

Vytvořme funkci, která vyjadřuje rozložení jedné lodi, tj. $j(N, A) = m(N - A + 1)$, pak náš vzorec je $Nj(M, A) + Mj(N, A)$.

Tento vzorec je sice jednoduchý, ale co přesně vyjadřuje člen $N - A + 1$? Na tenhle člen se můžeme dívat tak, že jsme do prostoru s šířkou $N$ umístili objekt, který zabírá $A$ políček (tím je odebere pro budoucí výběr), a zároveň sám o sobě reprezentuje jedno nové políčko. Pokud chceme do prostoru šířky $N$ vložit objekty velikosti $A$ a $B$, tak použijeme stejnou logiku a dostaneme $(N - A - B + 2)$ rozmístění pro první loď, a posléze zbývá $(N - A - B + 1)$ pro druhou loď. Počet rozmístění dvou lodí si označíme funkcí $d$.

$$d(N, A, B) = (N - A - B + 2)m(N - A - B + 1)$$

Nyní chceme vyjádřit, kolika způsoby jdou lodě délky $A$ a $B$ vložit do pole velikosti $N \times M$. Zafixujme si loď délky $A$ jako první, kterou do pole položíme vertikálně na libovolné místo, a spočteme počet možností položení lodě $B$ – což nám vytváří čtyři unikátní možnosti. Lodě jsou buď 1. paralelně za sebou, 2. paralelně vedle sebe, 3. kolmo za sebou, či 4. kolmo vedle sebe.




**Obrázek 2.1** Nákres všech možností prvního vstupu

Z principu, který počítá rozestavení lodí lze vyčíslit všechny tyto případy. V případě 1 je to přesně to co jsme počítali funkcí $d$, lze navíc ještě vybrat v jakém sloupci budou, tak dostáváme $Md(N, A, B)$. Případ 2 je jenom počet rozestavení v různých sloupcích, tj. $M(M-1)j(N, A)j(N, B)$. Případ 3 nastane, pokud je 1. loď ve stínu druhé, což pro fixní postavení 2. lodě nastává pouze v $B$ z $M$ možných postavení do sloupců 1. lodě. Na spočtení použijeme fci $d$, kde ale velikost 2. lodi nahradíme jedničkou (protože je na sloupec kolmo), tj. $Bd(N, A, 1)$. Poslední, případ 4, nastává v $M - B$ rozestavení 1. lodi pro fixní pozici 2. lodi a lze vyjádřit jako $j(M, B)(M - B)j(N, A)N$.

Shrnutí počtu rozestavení, sumu si označíme funkcí $D$:

$$D(A, B, N, M) = \sum \begin{cases} Md(N, A, B) & \text{paralelně za sebou;} \\ M(M-1)j(N, A)j(N, B) & \text{paralelně vedle sebe;} \\ j(M, B)Bd(N, A, 1) & \text{kolmo za sebou;} \\ j(M, B)(M-B)j(N, A)N & \text{if kolmo vedle sebe.} \end{cases}$$

Máme počet rozestavení pro případ, kdy je 1. loď vertikáľně. Ve chvíli, kdy jí chceme horizontálně stačí prohodit $N$ a $M$ koordináty. Celkový výsledek je tedy:

$$R(N, M, A, B) = D(N, M, A, B) + D(M, N, A, B) =$$

$$= Md(N, A, B) + M(M-1)j(N, A)j(N, B) + j(M, B)Bd(N, A, 1) + j(M, B)(M-B)j(N, A) +$$

$$+ Nd(M, A, B) + N(N-1)j(M, A)j(M, B) + j(N, B)Bd(M, A, 1) + j(N, B)(N-B)j(M, A) =$$

Referenční řešení bylo napsáno v `c++` jak hrubou silou, tak přímo.