

Řešení úlohy č. 1

Úložiště

Rekapitulace zadání

Máme k dispozici síťové uzly, které nám s určitým zpožděním pošlou zpět data, která jsme na ně vyslali. Má-li uzel i frekvenci a_i a pošleme mu data v čase t , přijdou nám zpět v čase $t + a_i$ a ihned je na něj zase musíme odeslat.

Vstupem jsou právě zmíněné frekvence, označme si toto pole jako A .

Cílem je nalézt největší k takové, že lze vybrat k prvků z A tak, aby bylo možné vytvořit rozvrh o délce k slotů, kde v každém slotu je vyhrazeno odesílání a přijímání dat od právě jednoho uzlu. Zároveň musí platit, že v každém z prvních k slotů odešleme data k jinému uzlu a data ještě nemůžeme přijímat. V dalších opakováních rozvrhu se nám nikdy nesmí stát, že by nám přišla data během jiného slotu, než je přiřazený danému uzlu.

Jak řešit?

Sloty, ve kterých se smí vrátit odpovědi od uzlů, se opakují každých k milisekund, z toho vyplývá, že latence uzlů použitých pro ukládání dat musí být dělitelné k .

První rozvrh musí být zaplněný vysíláním k různým uzlům, tedy uzlů dělitelných k musí být nejméně k .

Tedy hledáme: $\max\{k \mid \text{existuje } b_1, \dots, b_k \text{ takové, že } k \text{ dělí } b_i \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, k\}\}$, kde b_1, \dots, b_k jsou uzly vybrané z A .

Ukažme si řešení na příkladu, kdy $A = [4, 7, 3, 2, 9, 6, 5, 7]$.

Bez újmy na obecnosti si můžeme A seřadit, pak tedy $A = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 9]$.

Označme si: $n = |A|$ a $m = \max(A)$.

Pro každé možné k (tedy od 1 do $\min(n, m)$) chceme zjistit, kolik uzlů můžeme použít (tedy takových, které jsou celočíselnými násobky k):

k	Použitelné uzly
1	2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 9
2	2, 4, 6
3	3, 6, 9
4	4
5	5
6	6
7	7, 7
8	

Nezajímá nás, ke kterým uzlům můžeme vysílat. Stačí nám jen vědět, kolik jich je. Proto si předchozí můžeme zjednodušit takto:

k	Počet použitelných uzlů
1	8
2	3
3	3
4	1
5	1
6	1
7	2
8	0

Hledáme největší k takové, že $k \leq$ počet použitelných uzlů pro k . Stačí tedy jít od největšího k a najít první, které splňuje podmínku. Přinejhorším vždy skončíme na $k = 1$, pokud pole A není prázdné.

Možná nejjednodušší způsob, jak výše zmíněný postup provést, je začít od nejvyššího možného k a zkusit s ním vydělit postupně všechny latence uzlů. Poté jen stačí porovnat, zda počet zbytků po dělení rovných 0 je $\geq k$. Pokud ano, našli jsme naše k , pokud ne, zkusíme k o jedna menší. Tento způsob má však složitost $\mathcal{O}(\min(n, m) * n)$, proto je lepší na to jít jinak:

Pro každou odlišnou latenci si stačí zapamatovat, kolikrát přišla na vstup. Pak stačí projít každou různou latenci a_i a zkusit možné dělitele od 1 do $\sqrt{a_i}$, zda dělí a_i . Pokud ano, zvýšíme u k počet použitelných uzlů. Nakonec jen projdeme k od největšího a vybereme první, které splňuje podmínku. Složitost tohoto postupu je $\mathcal{O}(n * \sqrt{m})$.