

Úloha č. 1

Šelmy



Zamysli se!

10 b

Tato úloha je čistě teoretická, tvým úkolem zde není napsat program. Namísto toho si dej záležet na kvalitním slovním popisu, kde mimo jiné jasně zdůvodníš, proč tvůj postup skutečně bude fungovat.

Při svém průzkumu ostrova jsi narazil na zvláštní úkaz. Celou jednu část tvoří široké kamenné sloupy skalního města, každý přikrytý čepicí dlouhé žluté trávy. Po geologické stránce je to úchvatná podívaná, co je ale ještě zajímavější a tajemnější, je nahnutý stěžeň plachetnice, který vyčnívá zpoza těch impozantních přírodních věží. Samozřejmě, že ti to nedalo, a pokusil ses najít cestu na pobřeží do míst, kde předpokládáš, že leží pozůstatky jakéhosi korábu. Ani po několika pokusech se ti ale nepodařilo sejít k pobřeží z vhodné strany. Moře je v těchto místech plné ostrých útesů a samotné skalní město stojí odděleně od zbytku ostrova. Zdá se, že jediná cesta vede přímo přes vrcholky sloupů, a i ta je jen těžko přístupná přes několik rozeklaných skal.

Rád by ses k patě stěžně dostal, ale výšlap na vyvýšené místo, odkud lze zdejší terén lépe sledovat, ti odhalil zásadní komplikaci. Skalní město se totiž přímo hemží tlupou velkých kočkovitých šelem. Při pozorování jejich hravých skoků mezi kamennými věžemi v závratných výškách máš pocit, že by sis možná měl raději vybrat dosažitelnější cíl. Přeci jen to vypadá na nějakou odrůdu tygra, která tu navíc vychovává mladé, a smečka je tak početná, až jsi nucen dumat nad tím, jak se vlastně v takovém prostředí dokáže celá uživit.

Pohled na krvelačné predátory ti nahání husí kůži, ale zvědavost stejně vítězí. A tak se pomalu začínáš chystat na nebezpečnou výpravu. Vlét do jámy lvové aniž bys věděl jak ven by bylo čiré bláznovství, proto ses jako první zaměřil na vzdálený průzkum a rozhodl ses vše řádně promyslet.

Poznámka k terminologii

V následujícím textu zaměňujeme pojmy „sloup“, „kamenná věž“, „ostrůvek“, „plošina“ a „plošinka“. „Skalním městem“ se myslí soubor sloupů spolu s přechody (mosty, schody, průlezy, ...) mezi nimi.

Kartografická průprava

Po chvíli sledování skalního města z vyvýšené pozice ses rozhodl, že bude užitečné nakreslit si mapu. V ní sis čarou spojil každé dva sloupy, mezi kterými by se dalo přelézt nebo přeskočit. Mezi některými z nich mohou navíc vést mosty ze spadlých stromů, takže přechody mezi plošinami se mohou různě křížit. Aby ses v mapě lépe vyznal, značíš si mezi každými dvěma sloupy maximálně jednu čáru – jde ti o to zaznamenat, jestli se lze přesunout z jedné plošiny na druhou, ne kolika způsoby by to fyzicky šlo.

Tvůj tvůrčí kartografický proces tě naplňuje nadějí a nadšením z nadcházející návštěvy neprobádaných nádher, míst netknutých nohou nikoho po dlouhé roky. Dost možná jsi vůbec

první člověk, který se snaží tento malý flíček Země podrobně zmapovat. Pro případný únik je znalost cesty pryč z tygřího doupěte klíčová, ne nadarmo patří mapa mezi základní pomůcky pravého dobrodruha. Záhy se ale nad papírem mračíš: z tvé pozorovatelný nejde úplně poznat, mezi kterými travnatými plošinkami lze a nelze přelézt. Po chvilce dumání nad možným řešením ses rozhodl načrtnout hned několik případných situací.

1. Z každého sloupu lze dojít na každý jiný sloup. Síť přechodů mezi sloupy ale neobsahuje žádné cykly, takže kdyby byl ze skalního města kterýkoliv přechod odebrán, už by nebylo možné dojít z jednoho sloupu na libovolný jiný.
2. Skalní město má tvar dvojrozměrné mřížky, tzn. každý vnitřní sloup má přesně čtyři sousedy, sloupy na okrajích a v rozích mají tři, respektive dva sousedy. Každý přechod mezi sloupy je zarovnaný s osami mřížky, z libovolného vnitřního sloupu lze v jednom tahu přejít na sever, na jih, na západ nebo na východ.
3. Skalní město Q_0 tvoří jediný sloup. Skalní město Q_n se skládá ze dvou skalních měst Q_{n-1}^a a Q_{n-1}^b spojených tak, že mezi každým sloupem v Q_{n-1}^a a jeho příslušným zrcadlovým obrazem v Q_{n-1}^b je natažen most.

Pro začátek by bylo dobré si rozmyslet, jestli se ti podaří vrak lodi prozkoumat, když se budeš kolem tygřů pohybovat naprosto nepozorovaně.

První úkol (3b)

Každá šelma obývá sama jeden travnatý ostrůvek na vrcholu kamenného sloupu. Na jednom sloupu začínáš, o jeden sloup se opírá stěžeň. Úkolem je dojít na sloup se stěžněm a následně zpátky tam, odkud jsi přišel. V každém kole se můžeš pohnout na jeden sousední sloup. Pokud se v jeden čas vyskytneš na ostrůvku, na kterém je i šelma, šelma tě zadává (a dál se nemůžeš hnout). Diskutuj možnost splnění úlohy pro každou ze tří zmíněných topologií skalního města a rozepiš situaci pro nula, jednu a dvě šelmy. V tomto případě se šelmy nehnu z místa, na kterém simulaci začínají.

Jsi schopen úkol splnit nezávisle na tom, kde stojí stěžeň a jak jsou šelmy rozmístěny?

Ukázka řešení

Pro lepší pochopení správné formy řešení ukážeme jak na první topologii s jedinou šelmou. Předpokládejme, že stěžeň, hráč i šelma stojí každý na jiném ostrůvku (jinak jsou buď hráč a šelma na jednom místě (triviální prohra), hráč a stěžeň na jednom místě (triviální výhra), nebo šelma a loď na jednom místě (triviální prohra)). Skalní město má tedy alespoň tři sloupy.

Díky tomu, že jsou všechny ostrůvky dosažitelné ze startovní pozice (jak je řečeno v zadání topologie 1), je možné, že hráč k lodi dojde. Zároveň to ale vypadá, že by mu to šelma mohla překazit. Tady je potřeba se nad situací zamyslet a zvážit různé možnosti. Ve správném řešení by měla být jasně vidět domněnka, kterou řešitel zformuloval. Navíc musí řešení obsahovat buď zevrubně odůvodněnou úvahu ukazující, že byla domněnka správná, nebo původní návrh vyvrátit a tím dokázat, že určitě neplatí.

V našem příkladě předpokládejme, že existuje univerzální strategie¹⁾ hráče, se kterou vždy najde cestu k lodi²⁾. Po cestě ale nesmí projít skrz ostrůvek, na kterém se nachází šelma, jinak by prohrál. Představme si tedy stejné skalní město, ale bez ostrůvku s šelmou (a k němu připojených přechodů). Strategie hráče, která fungovala na původním skalním městě,

¹⁾ Strategii je myšlena předem známá sada příkazů, kterými hráč svůj pohyb skalním městem řídí; algoritmus.

²⁾ Vzhledem k tomu, že přechody mezi sloupy jsou obousměrné, a šelmy se nehýbou, není třeba si lámat hlavu nad tím, jak se hráč vrátí zpět.

musí fungovat i na této jeho úpravě, protože přes smazaný ostrůvek neprochází. Zároveň ale zadání topologie stanovilo, že po odebrání libovolného přechodu už neexistuje cesta mezi každými dvěma sloupy. Odebráním celého ostrůvku jsme alespoň jeden přechod odebrali¹⁾, tudíž mohou existovat ostrovy, na které se z počáteční pozice hráče v upraveném městě nejde dostat²⁾. Tím pádem ale předpokládaná univerzální strategie neexistuje: pokud je stěžeň lodi opřen o nějaký z těchto nedosažitelných sloupů, hráč se k němu nemá jak dostat. Odpověď na otázku v prvním úkolu pro topologii 1 s jednou šelmou proto zní „ne.“

Závěrem je třeba dodat, že v mnoha případech je velmi snadné ukázat, že naprosto obecná strategie pro hráče neexistuje. Tady to jde hned ve dvou ze třech triviálních situací zmíněných v prvním odstavci ukázky. Rozmyslet si krajní situace je sice v řešení důležité, rádi bychom ale viděli i úvahu, která zvládá libovolně velká skalní města.

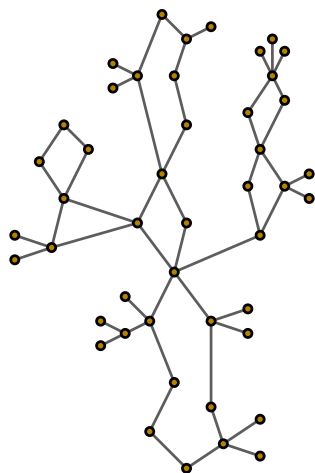
Aplikovaná tygrologie

Rozbor potenciálních tvarů skalního města je dobrý jako rozcvička mozkových závitů, ale není ti nic moc platný, dokud spoléhá na tygří nehybnost. Ačkoliv tvé schopnosti v plížení nejsou zrovna špatné, sen o nepozorovaném pohybu teritoriem kočkovitých šelem si nejspíš nesplníš. Je načase zjistit, jestli máš vůbec nějakou šanci na přežití tváří v tvář těmto nebezpečným zvířatům.

Sledování tygrů v tobě vyvolalo dojem, že se jedná o skutečně rafinované šelmy. Jejich pohyb a taktika lovu malé kořisti (převážně mořských ptáků a menších savců, jejichž osud bys nerad sdílel) zahrnuje koordinaci několika zvířat najednou. Způsob, kterým potravu nahání přes sloupy skalního města, napovídá, že všichni tygři spolupracují na provedení propracovaného plánu, a jsou schopni jakési formy komunikace. Jedna věc ti ale hraje do karet: kočkovité šelmy milují spánek. Nejsi zrovna olympijský sportovec, ale jestli tygrům dokážeš unikat dost dlouho, nakonec se unaví a na honičku se ze zívnutím vykašlou.

Navíc se ti povedlo přijít na ještě jednu možnou topologii, která by na část ostrova před tebou mohla sedět. Napadla tě, když jsi se u načrtů své mapky začal nudit a místo toho jsi chvíli kreslil kaktusy. A proč by z nich vlastně nemohly být taky mapy? Odpovídající města se skládají z cyklů, které se buď nepřekrývají vůbec, nebo se scházejí na jediném sloupu. V různých místech z nich navíc vyrůstají trásně připomínající kaktusové květy. Třídou takových měst se ti povedlo vyjádřit následující vlastnosti:

4. Skalní město má tu vlastnost, že libovolné dva cykly v síti jeho přechodů sdílí nanejvýš jeden sloup.



Jedna z možných map skalního města čtvrté topologie.

¹⁾ Protože v původním skalním městě jsou ostrůvky alespoň 3 (viz první odstavec ukázky) a z každého vede cesta na každý jiný, ikdyž možná přes šelmu.

²⁾ Přesněji budou tyto ostrovy existovat právě když ostrov šelmy sousedí s alespoň dvěma dalšími.

S načerpanými vědomostmi se ti v hlavě formuluje smělý plán: proběhnout skalním městem aniž by ses dostal do slepé uličky a unikat šelmám tak dlouho, aby se unavily. Jakmile se odeberou na siestu, měl bys mít dostatek času slézt k vraku na pobřeží, ztroskotanou loď prohledat a s trochou štěstí se i vrátit živý a zdravý zpět do bezpečnějších částí ostrova. Aby tento manévr vyšel, musíš se důvěrně seznámit s všelijakými klíčkami, kterými tě tygři můžou doběhnout.

Druhý úkol (7b)

Každá šelma obývá sama jeden travnatý ostrůvek na vrcholu kamenného sloupu. Tentokrát si můžeš vybrat počáteční ostrůvek, jakmile znáš rozmístění šelem. Tygři se přirozeně rozmisťují tak, aby byli připraveni vystartovat po potenciální kořisti. V každém kole se můžeš pohnout na jeden sousední sloup nebo zůstat, kde jsi. Pokud se v jeden čas vyskytněš na ostrůvku, na kterém je i šelma, šelma tě zadává (a dál se nemůžeš hnout).

V tomto případě je tvým úkolem najít strategii, ve které jsi schopen šelmám unikat libovolně dlouho. Stejně jako ty se i šelmy mohou pohybovat rychlostí nula až jeden ostrůvek za kolo, zároveň se ale nežerou navzájem, takže několika šelmám nevadí ostrůvek sdílet. Ve snaze tě chytit si mohou libovolně nadbíhat a spolupracovat mezi sebou. Pro účely této skalní hry táhneš první ty, pak všechny šelmy najednou, a takto se střídáte.

Diskutuj strategie šelem pro topologie 2-4 skalního města a u každé z nich rozepiš situaci pro jednu a dvě šelmy.

Průzkum prastaré plachetnice

Ačkoliv jsi strávil spoustu času přípravou, po prvních krůčcích v teritoriu těch pruhovaných bestí jsi stál na roztřesených nohách. Naštěstí se ti díky bystrému zraku a novým průlomům v tygrologii podařilo rychle se zorientovat. Tvůj plán zafungoval a byl jsi schopen před tygry utíkat dost dlouho na to, aby si pronásledování rozmysleli. Následně jsi sáhl do studny moudrosti prvního úkolu a vykoumal jsi, jak po skalních útvech projít, aniž bys vzbudil dosud spící šelmy. Nakonec jsi se dostal až na sloup se stěžněm s obratností, za kterou by se leckterý tygr nemusel stydět. V návalu adrenalinu ti přišlo jako dobrý nápad pokusit se sjet po stěžni dolů na pobřeží, takže ti písek ještě skřípal mezi zuby, když ses s bolavou hlavou namáhavě zvedl z pláže.

Plachetnice, lépe řečeno to, co z ní zbylo, tu zřejmě stojí zabořená přídí v písku už desítky let. Zašedlé dřevo popraskaných, sluncem vybělených prken tak tak ještě drží pohromadě a místy úplně podlehllo povětrnostním vlivům. Bujná mořská flora a fauna našly v třískách propadlé paluby útočiště, což celistvosti korábu taky nijak nepomohlo. Navzdory stavu rozkladu jsi ale po chvíli hledání mezi troskami zahlédl zteřelý cár papíru. Je čímsi popsáný, ale na první pohled se jedná o nějaký cizokrajný jazyk. Možná dialekt slovenštiny, ale luštění bude lepší nechat na později. Rychle ses ujistil, že pláž nenese jiné známky lidské aktivity – jestli někdo ztroskotání přežil, musel se buď stát obětí místních predátorů, nebo se dostal do vnitrozemí – a začal hledat cestu zpět.